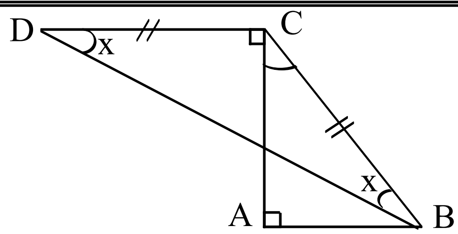
۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

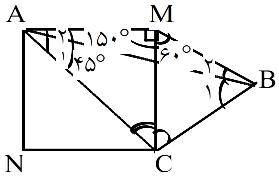



مثلث $BDC$ متساوی‌الساقین است.

فرض کنیم $D\hat{B}C$ برابر $x$ باشد در این‌صورت داریم:

$$۲x + ۹۰ + ۲۴ = ۱۸۰ \Rightarrow ۲x = ۶۶ \Rightarrow x = ۳۳$$

۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.




$AM=BM \Rightarrow$ مثلث $ABM$ متساوی الساقین است. $\Rightarrow \widehat{A}_۲=\widehat{B}_۲$

$$\widehat{M}=۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}_۲+\widehat{B}_۲=۱۸۰^\circ-\widehat{M}=۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ=۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_۲=\widehat{B}_۲=۱۵^\circ$$

چون با رسم قطر مربع زوایای $۴۵^\circ$ ایجاد می‌شود، می‌نویسیم:

$$\widehat{A}_۱=۴۵^\circ-\widehat{A}_۲=۴۵^\circ-۱۵^\circ=۳۰^\circ$$

$$\widehat{B}_۱=۶۰^\circ-\widehat{B}_۲=۶۰^\circ-۱۵^\circ=۴۵^\circ$$

$$\widehat{C}_۱=۶۰^\circ+۴۵^\circ=۱۰۵^\circ$$

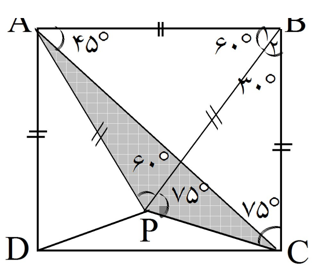
بنابراین در مثلث $ABC$، نسبت بزرگ‌ترین زاویه به کوچک‌ترین زاویه برابر است با:

$$\frac{\text{بزرگ ترین زاویه}}{\text{کوچک ترین زاویه}}=\frac{\widehat{C}}{\widehat{A}_۱}=\frac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ}=\frac{۷}{۲}$$

در نتیجه بزرگ‌ترین زاویه، $\frac{۷}{۲}$ برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث است.

۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مثلث متساوی الاضلاعی را در درون مربع طوری قرار می‌دهیم که در یک ضلع مشترک باشند. حال با توجه به شکل مقابل داریم:

$$\widehat{PAB}=\widehat{APB}=\widehat{B}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B}_۲=۹۰^\circ-\widehat{B}_۱=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ \\ \widehat{PAC}=\widehat{PAB}-\widehat{CAB}=۶۰^\circ-۴۵^\circ=۱۵^\circ \ (\text{زاویه ی کوچک تر}) \end{cases}$$

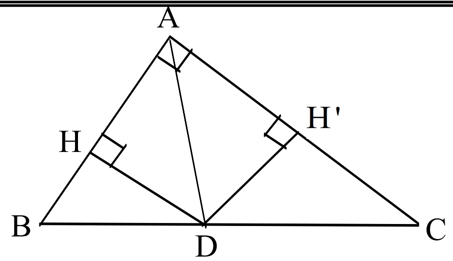



چون مثلث $BPC$ متساوی الساقین است $(BP = BC)$، نتیجه می‌گیریم زوایای مجاور قاعده‌ی این مثلث هر کدام برابر $\frac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$ می‌باشند. یعنی:

$$\widehat{BPC}=\widehat{BCP}=۷۵^\circ \Rightarrow \widehat{APC}=\widehat{BPC}+\widehat{APB}=۷۵^\circ+۶۰^\circ=۱۳۵^\circ \ (\text{زاویه ی بزرگ تر})$$

بنابراین نسبت زاویه‌ی بزرگ‌تر به زاویه‌ی کوچک‌تر در مثلث $APC$ برابر با $\frac{۱۳۵^\circ}{۱۵^\circ}=۹$ است. (توجه کنید که زاویه‌ی دیگر مثلث $APC$ (زاویه‌ی متوسط) برابر با $۳۰^\circ$ است.)

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. از D عمودهای DH و 'DH را بر اضلاع قائمه AB و AC رسم می‌کنیم. چون هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند، پس $DH = DH'$ در نتیجه چهارضلعی 'AHDH مربع است و AD قطر این مربع می‌باشد، بنابراین داریم: $AD = \sqrt{۲}\,DH$

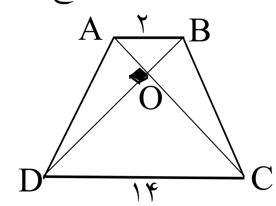



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB \times AC = \frac{۱}{۲}DH \times AB + \frac{۱}{۲}DH' \times AC$$

$$\Rightarrow AB \times AC = DH(AB + AC) \Rightarrow ۲۱ = ۱۰\,DH \Rightarrow DH = ۲/۱$$

بنابراین: $AD = ۲/۱\sqrt{۲}$

۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث‌های OAB و OCD مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای متساوی الساقین هستند. بنابراین داریم:

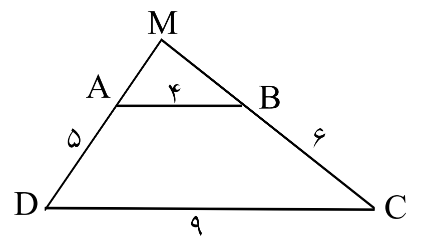



$$OA^۲ + OB^۲ = AB^۲ \xrightarrow[AB = ۲]{OA = OB} ۲OA^۲ = ۴ \Rightarrow OA^۲ = OB^۲ = ۲$$

$$OC^۲ + OD^۲ = CD^۲ \xrightarrow[CD = ۱۴]{OC = OD} ۲OC^۲ = ۱۹۶ \Rightarrow OC^۲ = OD^۲ = ۹۸$$

$$AD^۲ = OA^۲ + OD^۲ = ۲ + ۹۸ = ۱۰۰ \Rightarrow AD = BC = ۱۰$$

۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. بنا بر فرض تست شکل مقابل را خواهیم داشت:



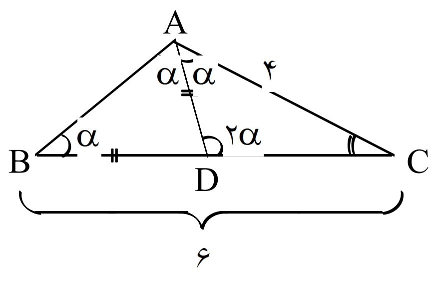

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{MB}{MC}$$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل از}} \frac{MA}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow MA = ۴$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل از}} \frac{MB}{۶} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow MB = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

محیط MAB $= MA + MB + aB = ۴ + ۴ + ۴/۸ = ۱۲/۸$

۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC ، زاویه $\widehat{A} = ۲\widehat{B}$ و $BC = ۶$ و $AC = ۴$. اگر نیمساز داخلی رأس A را رسم کنیم، چون دو زاویه‌ی داخلی دو مثلث ABC و ACD برابرند، نتیجه می‌گیریم که این دو مثلث متشابه‌اند. با نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث، داریم:



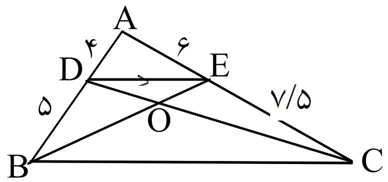

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{ACD} \xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{۴}{CD} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow CD = \frac{۱۶}{۶} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow BD = ۶ - \frac{۸}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

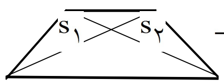
چون مثلث ABD متساوی‌الساقین است، لذا $AD = BD = \frac{۱۰}{۳}$. بنابراین با جایگذاری $AD = \frac{۱۰}{۳}$ در نسبت تشابه بالا، به راحتی اندازه‌ی ضلع AB به دست می‌آید. داریم:

$$\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{AB}{\frac{۱۰}{۳}} = \frac{۴}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow AB = \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۶}{۴} = \frac{۶۰}{۱۲} = ۵$$

۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در شکل مقابل چون $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ است، در نتیجه طبق عکس قضیه‌ی تالس نتیجه می‌گیریم که $DE \parallel BC$ بوده و چهارضلعی $BCED$ ذوزنقه می‌باشد.




از طرفی می‌دانیم در هر ذوزنقه با رسم دو قطر، دو مثلث هم مساحت به‌وجود می‌آید، داریم:



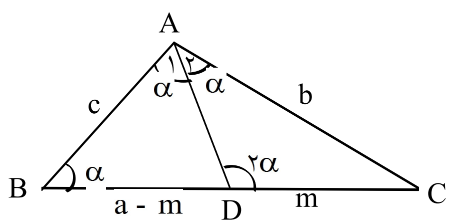

$\rightarrow S_۱ = S_۲$

بنابراین در ذوزنقه‌ی $BCED$ با رسم دو قطر $BE$ و $CD$ دو مثلث $OBD$ و $OCE$ هم مساحت می‌باشند و در نتیجه $\frac{S_{OBD}}{S_{OCE}} = ۱$ است.

۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نیم‌ساز زاویه‌ی $A$ را رسم می‌کنیم.

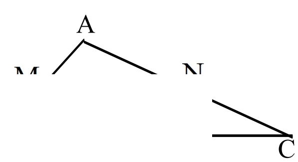
$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{A} = ۲\alpha \\ \hat{B}_۱ = \hat{A}_۲ = \alpha \end{cases} \overset{\frown}{ADC} \Rightarrow \sim \overset{\frown}{ABC} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{a-m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^۲ = am \\ a^۲ - ma = bc \end{cases} \Rightarrow a^۲ - b^۲ = bc$$




۱۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$MNEB \Rightarrow \left.\begin{matrix} MN \parallel BC \\ NE \parallel MB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \overset{(زز)}{\sim} \overset{\Delta}{ABC} \quad \overset{\Delta}{NEC} \overset{(زز)}{\sim} \overset{\Delta}{ABC}$$



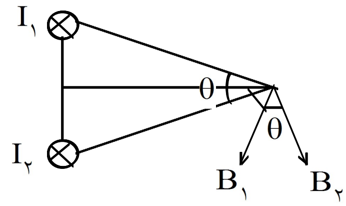

$$\frac{AM}{BM} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۵} = k \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{۹}{۵} S_{کل} \quad (۱) \\ \frac{BM}{AM} = \frac{۲}{۳} = \frac{NC}{AN} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{۲}{۵} = k' \longrightarrow \frac{S_{NEC}}{S_{ABC}} = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S_{NEC} = \frac{۴}{۲۵} S_{کل} \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱) و (۲)} S_{AMN} + S_{NEC} = \left(\frac{۹}{۲۵} + \frac{۴}{۲۵}\right) S_{کل} = \frac{۱۳}{۲۵} S_{کل} \Rightarrow S_{MNEB} = \frac{۱۲}{۲۵} S_{کل} = \%۴۸ S_{کل}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در نقطه‌ی A دو میدان مغناطیسی برابر ایجاد می‌شود که برآیند آن‌ها برابر است با:

$$B = 2B_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad , \quad B_1 = 2\times 10^{-7}\frac{I}{d}$$

$$B = 2\times 2\times 10^{-7}\frac{I}{\sqrt{a^2+x^2}}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$




هنگامی B ماکزیمم است که مشتق آن صفر باشد.

$$B = 2\times 2\times 10^{-7}\frac{Ix}{a^2+x^2} \rightarrow \frac{dB}{dx} = 4\times 10^{-7}\frac{I\left(a^2+x^2\right) - 2x(Ix)}{\text{مربع مخرج}} = 0 \rightarrow \left[a^2+x^2-2x^2\right] = 0 \rightarrow a = x$$

۱۲- از سیم راست جریان عبور می‌کند پس در اطراف آن میدان مغناطیسی بوجود می‌آید جهت این میدان مطابق قانون دست راست دوایر متحدالمرکزی در صفحهٔ شکل است که جهت آنها هم جهت با جریان $I'$ است. این میدان باید بر حلقه که دارای جریان I است نیرو وارد می‌کند ولی چون جهت میدان و جهت جریان یکسان است ($\sin\alpha=0$ در رابطهٔ $F = ILB\sin\alpha$) لذا هیچ نیرویی بر حلقه وارد نمی شود و حلقه ساکن می‌ماند و گزینه ۴ صحیح است.

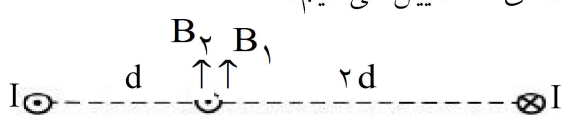
۱۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$P_1 = R_1 I_1^2 \longrightarrow 24 = 6I_1^2 \longrightarrow I_1 = 2A \longrightarrow I_{\text{سیملوله}} = 2+1 = 3A$$

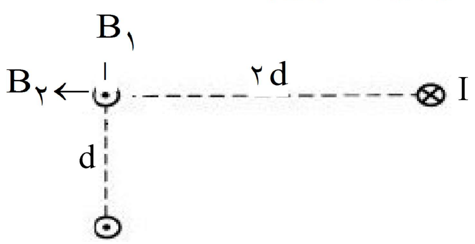
$$V_1 = V_2 \longrightarrow 6I_1 = 12I_2 \longrightarrow I_2 = 1A$$

$$B = \mu_0 nI = 4\pi\times 10^{-7}\times 1000\times 3 = 12\pi\times 10^{-4}T = 1.2\pi\times 10^{-3}T$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میدان مغناطیسی کل را در هر حالت در نقطه‌ی A تعیین می‌کنیم.




$$B_T = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2n}\frac{I}{d} + \frac{\mu_0}{2n}\frac{I}{2d} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 I}{2nd}$$




$$B_1 = \frac{\mu_0}{2n}\frac{I}{2d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0}{2n}\frac{I}{d}$$

$$B'_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

$$B'_T = \frac{\mu_0 I}{2nd}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2} = \frac{\mu_0 I}{2nd}\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\mu_0 I}{2nd}$$

نیروی وارد بر سیم A از رابطه $F = ILB\sin\alpha$ به دست می‌آید. با یکسان بودن مواد یکسان در هر دو حالت می‌توان نسبت نیروها را به دست آورد.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{B'_T}{B_T} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی $\varphi = AB = k\mu_{\circ} \frac{AN}{l} I$، شار گذرنده از سیم‌لوله برابر است با:

ضریب تراوایی : $k = ۳۰۰ , \mu_{\circ} = ۴\pi \times ۱۰^{-۷} \frac{T.m}{A}$

مساحت مقطع سیم‌لوله :

$A = \pi r^{۲} = \pi (۰/۰۲)^{۲} = ۴\pi \times ۱۰^{-۴}\ m^{۲}$ , $N = ۱۰۰$ دور , $I = ۰/۵\ a$ , $l = ۲۰\ cm = ۰/۲\ m$ , $\varphi = ?$

$$\varphi = ۳۰۰ \times ۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times ۴\pi \times ۱۰^{-۴} \times \frac{۱۰۰}{۰/۲} \times ۰/۵ = ۱/۲\ \pi^{۲} \times ۱۰^{-۵}\ Wb \xrightarrow{\pi^{۲} = ۱۰}$$

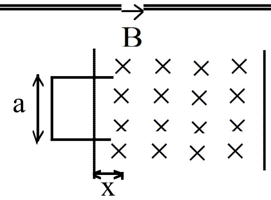
$$\varphi = ۱۲ \times ۱۰^{-۵} Wb$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -۱۰۰ \times \left(\frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۲}\right)(-۱۰۰\pi ۳ \operatorname{Sin} ۱۰۰\pi t) = ۲ \times ۱۰^{۲} \operatorname{Sin} \pi t \rightarrow \varepsilon_m = ۲۰۰V$$

$$t = \frac{۱}{۶۰۰} s \Rightarrow \varepsilon = ۲۰۰ \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۲۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰۰\,V$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. کل حرکت را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم:



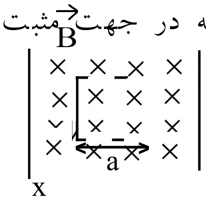

۱- از لحظه‌ای که حلقه وارد میدان می‌شود تا لحظه‌ای که تمام حلقه در داخل میدان قرار می‌گیرد. در این حالت شار گذرنده از حلقه برابر است با:

$$\varphi = BA\cos ۰^\circ = B.a.x \longrightarrow \varphi = Ba(Vt)$$

در نتیجه جریان القایی در حلقه برابر خواهد بود با:

$$I = \frac{N}{R}.\frac{d\varphi}{dt} = \frac{۱}{R} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{BaV}{R}$$

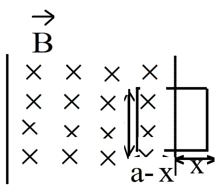
یعنی در این فاصله‌ی زمانی جریانی ثابتی به بزرگی $\frac{BaV}{R}$ در حلقه به‌وجود می‌آید. بنابر قانون لنز جهت این جریان القایی به گونه‌ای است که آثار مغناطیسی ناشی از آن با عامل به وجودآورنده‌ی جریان القایی یعنی تغییر شار مغناطیسی مخالفت می‌کند، بنابراین جریان القایی ایجاد شده در حلقه‌ی شکل بالا باید به گونه‌ای باشد که میدان مغناطیسی حاصل از آن برون‌سو باشد. در نتیجه بنا به قانون دست راست جهت جریان در حلقه در جهت مثبت مثلثاتی (پادساعتگرد) است.




۲- از لحظه‌ای که تمام حلقه وارد میدان شده است تا لحظه‌ای که حلقه شروع به خارج شدن از میدان کند، در این حالت شار گذرنده از حلقه برابر است با: $\varphi = BA\cos ۰^\circ = Ba^۲ =$ ثابت

در نتیجه جریان القایی در سیم برابر خواهد بود با: $I = \frac{۱}{R}.\frac{d\varphi}{dt} = ۰$

۳- زمان خروج از میدان در این حالت شار گذرنده از حلقه برابر است با:




$$\varphi = BA\ \cos ۰^\circ = Ba(a - x) = Ba(a - Vt) = Ba^۲ - BaVt$$

توجه داشته باشید که با گذشت زمان x افزایش می‌یابد $(x = Vt)$ در نتیجه جریان القایی در سیم برابر خواهد بود با:

$$I = \frac{۱}{R}\times \frac{d\varphi}{dt} = \frac{۱}{R}\times (-BaV) = \frac{-BaV}{R}$$

اکنون با توجه به قانون لنز و قانون دست راست درمی‌یابیم که جهت جریان در حلقه باید ساعتگرد یعنی در خلاف جهت مثبت مثلثاتی باشد، بنابراین از لحظه‌ی صفر تا T جریان القایی ثابت و برابر $\frac{BaV}{R}$ است و از لحظه‌ی T تا ۲T برابر صفر و از لحظه‌ی ۲T تا ۳T جریان القایی ثابت و برابر $-\frac{BaV}{R}$ است بنابراین نمودار جریان القایی بر حسب زمان، به صورت نمودار ارایه شده در گزینه‌ی ۱ خواهد بود.

۱۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$n = \frac{N}{l} = \frac{۱۰۰}{۲۵\times ۱۰^{-۲}} = ۴۰۰\ ,\ A = \pi R^۲ = ۱۰^{-۱}\pi\left(m^۲\right)$$

$$\Delta B = B_۲ - B_۱ = ۰ - B_۱ = -B_۱ = -\mu_۰ nI = -۴\pi\times ۱۰^{-۷}\times ۴۰۰\times ۳۰ = -۴۸\pi\times ۱۰^{-۴}T$$

$$\left|\vec{\varepsilon}\right| = NA\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \longrightarrow \left|\vec{\varepsilon}\right| = ۱۰۰\times ۱۰^{-۲}\pi\times\left|\frac{۴۸\pi\times ۱۰^{-۴}}{۰/۰۲}\right| = ۰/۲۴\ \pi^۲ V$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$B = \mu_۰ nI \longrightarrow B \propto I \longrightarrow B_۲ = ۲B_۱$$

$$\varphi = BA\cos\theta \longrightarrow \varphi \propto B \longrightarrow \varphi_۲ = ۲\varphi_۱$$

$$U = \frac{۱}{۲}LI^۲ \longrightarrow U \propto I^۲ \longrightarrow U_۲ = ۴U_۱$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۲P محیط هر حلقه‌ی پیچه است.

$$۲P = ۲\pi r = ۲ \times \pi \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{\pi}{۱۰} m$$

$$n = \frac{L}{۲P} = \frac{۶۰}{\frac{\pi}{۱۰}} = \frac{۶۰۰}{\pi}$$

$$\frac{۶۰ sec}{T} = \frac{۱۲۰۰ cycle}{۱} \Rightarrow T = \frac{۶}{۱۲۰۰} = \frac{۱}{۲۰} Sec$$

در هر $\frac{۱}{۲۰}$ ثانیه این پیچه یک دور می‌زند.

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲۰}} = ۴۰\pi$$

$$\varphi = nBA\, Sin\, \omega t = \frac{۶۰۰}{\pi} \times \frac{۲}{۱۰} \times \pi \left(\frac{۵}{۱۰۰}\right)^۲ Sin(۴۰\pi t)$$

$$\varepsilon = \frac{-d\varphi}{dt} = ۴۰\pi \times ۰/۳ \times Cos\, ۴۰\pi t = ۱۲\pi\, Cos\, ۴۰\pi t \Rightarrow \varepsilon_{max} = ۱۲\pi$$